R. Bruner
Math 2150, Fall 2006, Quiz 10
November 15, 2006

The eigenvalues of $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ are $\lambda_1 = -2$ and $\lambda_2 = 5$. (You do not need to check this.)
Find the general solution to the differential equation

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x.$$

$$\underline{\lambda_1 = -2} \qquad A - (-2)I = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{*\,1/4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x + y = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4)

$$\underline{\lambda_2 = 5} \qquad A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[+R_1]{} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad -3x + 4y = 0, \quad x = \tfrac{4}{3}y$$

4)

$$v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2)

$$\boxed{X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$x' = c_1 (-2e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 5e^{5t} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$= -2c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 5c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$